

****

**زیربرنامه:**

KeLB\_Main3D\_DualTimStp

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **توسعه دهندگان** | مرتضی نامور |  |
| حامد نظری |  |
| **تهیه کنندگان مستند** | مرتضی نامور، حامد نظری | |
| **تاییدکنندگان** | مرتضی نامور | |
| **تاریخ تنظیم سند** | 26/4/1395 | |
| **شناسه سند** | **MC2F050F1** | |
| **زبان برنامه‌نویسی** | **Fortran 90** | |

1. وظایف

این زیربرنامه، زیربرنامه اصلی مدل آشفتگی  می­باشد که سایر زیربرنامه­ها در آن فراخوانده می­شوند و درنهایت نیز، لزجت گردابه­ای و بخش نوسانی سرعت یعنی  محاسبه می­گردد.

1. توضیحات و تئوری

مدل آشفتگی  معروف­ترین و پرکاربردترین مدل آشفتگی می­باشد و تاکنون نیز نسخه­های متعدد و متنوعی از این مدل آشفتگی ارائه شده است[1]. مدل­های آشفتگی  برای طیف وسیعی از مسائل مهندسی، نتایج قابل قبولی ارائه می­دهند و برای شبیه­سازی جریان­های آیرودینامیکی نیز مدل مناسبی می­باشند. در تمامی مدل­های  دو معادله دیفرانسیل جداگانه به ترتیب برای انرژی جنبشی آشفتگی[[1]](#footnote-1)  و نرخ اضمحلال انرژی جنبشی آشفتگی[[2]](#footnote-2)  نوشته می­شود. این دو متغیر به صورت زیر تعریف می­شوند[2]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با استفاده از این تعاریف، می­توان معادله دیفرانسیل دقیق حاکم بر  و  را به دست آورد. اما این معادلات دقیق، حاوی ترم­های ناشناخته و غیرقابل اندازه­گیری فراوانی هستند که استفاده از آنها را در عمل و در مسائل مهندسی غیرممکن می­کند. اما در سال 1974، لاندر[[3]](#footnote-3) و اسپالدینگ[[4]](#footnote-4) براساس فیزیک آشفتگی، موفق شدند با ساده­سازی معادلات دقیق حاکم بر  و ، شکل کاربردی مدل  را ارئه دهند که توانایی شبیه­سازی طیف وسیعی از جریان­های آشفته را دارا بود[3]. مدل ارائه شده توسط لاندر و اسپالدینگ بعدها به مدل  معروف شد. به صورت خلاصه می توان مزایای کلی مدل­های  را به صورت زیر بیان نمود [2]:

* سادگی و قابلیت شبیه­سازی طیف وسیعی از جریان­ها
* عدم حساسیت نتایج به مقادیر جریان آزاد

اما مدل­های  در حالت کلی دارای نقایصی نیز می­باشند که از جمله آنها می­توان به موارد زیر اشاره کرد:

* دقت پایین در شبیه­سازی جریان­های چرخشی[[5]](#footnote-5) و جریان­های همراه با جدایش[[6]](#footnote-6)
* عملکرد نامناسب در نواحی با گرادیان فشار معکوس زیاد[[7]](#footnote-7)
* عملکرد نامناسب در لایه­های مرزی منحنی شکل[[8]](#footnote-8)
* دقت پایین در جریان­های داخلی با مقطع غیردایروی

برای اصلاح این نقایص تاکنون تلاش­های زیادی صورت گرفته که این تلاش­ها منجر به ظهور نسخه­های جدیدتر و کاربردی­تر از مدل  شده است. هدف هر یک از این نسخه­ها بهبود توانایی­های مدل  در پیش بینی خواص جریان آشفته بوده است. البته لازم به ذکر است که بسیاری از نسخه­های مختلف این مدل به منظور استفاده در کاربردهای خاص ایجاد شده­اند و از فرضیات خاصی استفاده می­نمایند که نمی­توان برای کاربردهای عمومی از آنها استفاده نمود.

* 1. معادلات حاکم

یکی از مشکلات مدل k-Epsilon استاندارد ناپایداری نزدیک دیواره می‌باشد. برای رفع این مشکل و سازگاری مدل‌ k-Epsilon استاندارد نزدیک دیوار، چندین اصلاح سازی معرفی شده است. نتیجه این فرموله‌بندی تحت عنوان معادلات k-Epsilon با عدد رینولدز پایین شناخته می‌شوند. اولین مدل k-Epsilon با عدد رینولدز پایین توسط جونز و لاندر معرفی شد و سپس در چندین تحقیق دیگر اصلاحات دیگری ارائه شد. ابتدایی ترین تصحیح ارائه شده توسط جونز و لاندر شامل عدد رینولدز آشفتگی وابسته به توابع  ، و  در روابط ‏(3) و ‏(4) می‌باشد. علاوه بر آنها ترم‌های دیگر  و  به معادلات برای فرآیندهای اتلاف ناشی از ناهمگنی اضافه می‌شوند. بنابراین معادلات k-Epsilon با عدد رینولدز پایین بشکل زیر نوشته می‌شوند[4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

که در آن ویسکوزیته آشفتگی به طریق زیر محاسبه می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و در معادلات قبل نمایانگر تولیدآشفتگی می‌باشد و بشکل زیر تعریف می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

ثوابت موجود در این معادلات به صورت زیر تعریف شده­اند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

همانطور که گفته شد، مدل یک مدل رینولدز پایین می­باشد و از تابع دیوار استفاده نمی­کند. در این مدل، در نزدیکی دیوار از توابع میرایی[[9]](#footnote-9) ارائه شده توسط مینر[5] استفاده می شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

همچنین  نیز به صورت زیر محاسبه می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که ، تنش برشی بر روی دیوار می­باشد و  نیز جهت عمود بر دیوار می­باشد. لازم به ذکر است که با توجه به رینولدز پایین بودن این مدل، شبکه استفاده شده در نزدیکی دیوار می­بایست به اندازه کافی ریز باشد.

در مدل k-Epsilon استاندارد ضرائب  ، و  واحد می‌باشند. این فرض برای زیر لایه آرام صحیح نمی‌باشد و توابع مناسبی برای ارضای شرایط فیزیکی نزدیک دیوار نیستند. لم و برمهوست [6] با اصلاح این توابع، مدل k-Epsilon استاندارد را برای جریان‌های نزدیک دیوار برای اعداد رینولدز بالا توسعه دادند. در این قسمت توسعه هریک از این توابع ارائه می‌شود:

* 1. توسعه تابع 

کاربردهای موفق زیادی در اعداد رینولدز بالا با استفاده از مدل k-Epsilon به همراه توابع دیوار برای جریان‌های روی دیوار با تابع  انجام شده است. در جریان‌های روی دیوار برای نواحی دور از دیوار اثرات لزجت در مقایسه با لزجت آشفتگی ناچیز می‌باشند. این در حالی است که در نواحی خیلی نزدیک دیوار اثرات لزجت سیال دارای اهمیت بالایی هستند و خواص بطور متناوب تغییر می‌کند و ****از حالت واحد دور می‌شود. معادله‌ای برای ****همراه با اثرات دیوار به شکل زیر معرفی شد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در کار جونز و لاندر همانطور که گفته شد مقادیر و بترتیب 5/2 و 02/0 می‌باشند. در کار هافمن مقدار، 75/1 می‌باشد. در هر حال ****و  تابعی منحصر به فرد از  می‌باشند. در این معادله ****در حضور دیوار تنها از  تاثیر می‌پذیرد.

چن [7] معادله‌ی دیگری را برای **** پیشنهاد کرد بطوری که در این معادله **** بطور مستقیم به فاصله عمودی دیوار وابسته می‌باشد. این معادله به شکل زیر می‌باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این معادله می‌باشد.

معادله‌ی دیگری توسط هسید و پوره[8] پیشنهاد شد. این معادله به شکل زیر می‌باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این معادله در نظر گرفته می‌شود.

در همه معادلات ارائه شده بالا ****و  تنها تابعی از  می‌باشند. فرمول‌های بالا برای حالت‌های گفته شده، به همراه مدل k-Epsilon نتایج خوبی را ارائه می‌دهند، ولی در هیچ یک از این معادلات بالا، **** نمی‌تواند با شرایط مرزی فیزیکی صحیح برای استفاده شود.

روی دیوار دارای مقدار محدودی می‌باشد و می‌باشد. تغییرات و نزدیک دیوار امکان بسط، توسط بسط تیلور را دارد و آنها را می‌توان به شکل زیر بسط داد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن *p* ها و *q* ها توابعی از فواصل مسیرهای جریان می‌باشند.

در فواصل خیلی کم از دیوار اگر از معادلات ‏(9) تا ‏(11) استفاده شود، با ، و  متناسب خواهد بود. از آنجا که یک معادله متغیر مورد نیاز می‌باشد بنابراین می‌توان با استفاده از مدل یک معادله‌ای هسید- پوره که توسط گیبسون و همکاران[9] اعمال شد معادلاتی بشکل زیر برای و بدست آورد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

رفتار  از متغیر مستقل مجزا می‌باشد. معادلات فوق می‌توانند ترکیب شده و بعد از حذف ، بیانی برای بر حسب ،،و بدست آورد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

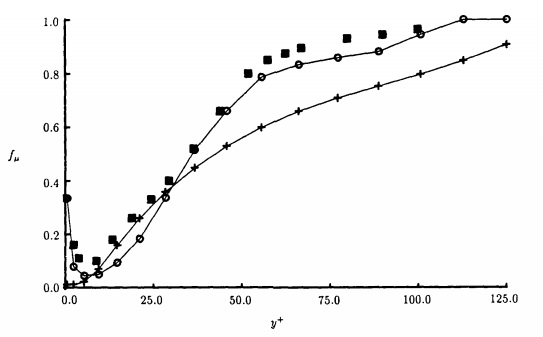
با قرار دادن مقدار  می‌توان نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

درنهایت میتوان از رابطه‌ی ساده شده زیر که معادله کلی می‌باشد برای اعداد رینولدز بالا استفاده می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

اکنون در حضور دیوار بطور مستقیم و غیرمستقیم از دیوار تاثیر می‌پذیرد. برای آشفتگی‌های بزرگ،  در فواصل دور از دیوار به سمت یک تمایل دارد اما در نزدیکی دیوار به وابسته می‌ماند. مقادیر ثابت و  با آزمایش و خطا مشخص می‌شود.

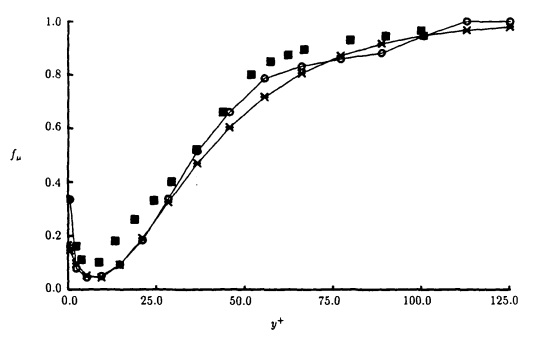


1. مقایسه توابع دمپ دیواره(). :نتایج آزمایشگاهی پیتل و همکاران. 🌕 محاسبه شده از داده های HHL. + محاسبه شده از مدل لم برمهوست معادله(17).

شکل فوق نمودار  را نشان می دهد. طبق محاسبات انجام شده با DNS،  در  تابع دارای مقدار مینیمم 04/0 می باشد و با دور شدن از دیوار این مقدار به سمت یک میل می کند. در مدل لم برمهوست با معادله ‏(17) در نزدیکی دیواره و همچنین  تابع  از نتایج DNS دور می شود. برای رفع این مشکل از تابع دمپ اصلاح شده ون درست به شکل زیر استفاده می شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این معادله با توجه به نتایج در  و  و  نتایج در تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی می باشد. در ‏شکل (2) تابع  محاسبه شده توسط معادله فوق با نتایج آزمایشگاهی و DNS مقایسه شده است و می توان تطابق خوبی را مشاهده کرد[5].



1. مقایسه توابع دمپ دیواره(). :نتایج آزمایشگاهی پیتل و همکاران. 🌕 محاسبه شده از داده های HHL. + محاسبه شده از مدل لم برمهوست اصلاح شده توسط معادله(18).
   1. توسعه تابع 

در محاسبات مربوط به اعداد رینولدز بالا این مدل همراه با توابع دیوار مقدار تقریبا برابر واحد می‌باشد. در ناحیه نزدیک دیوار مقدار با افزایش نرخ اتلاف دارای مقادیر بزرگی می‌باشد. اگر ثابت نگه داشته شود و مقدار آن برابر واحد فرض شود، می‌بایست ترمهای اتلاف به معادله انتقال برای پیش بینی یک میدان منطقی اضافه گردد. این ترم به شکل زیر پیشنهاد شد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این معادله همانطور که مشاهده می‌شود، تنها تابعی از می‌باشد. ثابت می‌بایست دارای یک مقدار کوچک باشد تا در زمانی که سطح آشفتگی بالا است و به طبع تقریبا برابر یک شود. روی دیوار می‌بایست کوچک و محدود باشد و دارای مقدار بزرگی است. مقدار از آزمایش و خطا بدست می‌آید.

* 1. توسعه تابع 

در اعداد رینولدز پایین در مدل k-Epsilon مقدار ****به صورت زیر فرض می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. تعمیم مدل k-Epsilon برای جریان تراکم پذیر

برای تعمیم معادلات و اعمال تصحیحات مربوط به تراکم‌پذیری جریان به معادلات ابتدا عدد ماخ آشفته بصورت زیر تعریف می‌شود[4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن بیانگر سرعت صوت می‌باشد.

اینک معادلات مدل k-Epsilon همراه با تصحیحات مربوط به تراکم‌پذیری جریان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

ترم نشان‌دهنده سهم ناشی از اتلاف تراکم‌پذیری می‌باشد، و ترم نشان دهنده ترم dilatation فشار می‌باشد. این دو ترم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که ضرائب بدست آمده موجود در این دو معادله توسط DNS به شرح زیر می‌باشند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. تصحیح انحنا در مدل‌های آشفتگی

یکی از ضعف های مدلهای اشفتگی حساسیت آنها به انحنا سطح و خطوط جریان انحنادار می باشد. بنابراین در شبیه سازی جریان های همراه با انحنا، اثر انحنا می بایست روی کمیت های آشفتگی و توابع آنها اعمال شود. براساس کارهای شور و اسپالارت اصلاحاتی روی ترم تولید آشفتگی در مدل های توربولانسی استاندارد اعمال شده است[10]. معادلات مربوط به این تصحیح در مستند مربوط به ترم تولید آشفتگی ارائه شده است.

* 1. بی‌بعد سازی معادلات مدل k-Epsilon اصلاح شده(k-Epsilon LB)

یکی از ملاحظات عددی، بی‌بعدسازی آنها می‌باشد. بطور خلاصه بی‌بعد سازی باعث می‌شود که بخش‌های مختلف معادلات هم مرتبه شده و در نتیجه خطاهای گرد کردن کاهش پیدا کند. پارامترهای مختلفی برای بی‌بعدساری معادلات حاکم بر جریان استفاده می‌گردد. از آنجا که معادلات حاکم بصورت بی‌بعد شده در این شبیه‌سازی استفاده شده است، بنابراین نیاز می‌باشد که معادلات مدل توربولانسی نیز به حالت بی‌بعد استفاده شود. در اینجا از پارامترهای زیر جهت بی‌بعد سازی معادلات استفاده می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در پارامترهای بالا نشان دهنده سرعت صوت می‌باشد.

در روابط بالا پارامترهای دار معرف کمیت‌های بعددار و زیرنویس بیانگر کمیت‌های جریان آزاد می‌باشد. همچنین مقدار پارامتر می‌تواند هر طول دلخواهی باشد که کاربر باید آن را تعیین نماید ولی در مسائل مربوط به ایرفویل، مقدار آن را برابر طول ایرفویل در نظر می‌گیرند.

معادلات مدل k-Epsilon همراه با تصحیحات مربوط به تراکم‌پذیری جریان را در حالت بعددار می‌توان به صورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

در معادلات بالا و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

با استفاده از کمیت‌های بی بعد گفته شده می‌توان نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

مقادیر و در مدل لم- برمهوست برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند.

ابتدا با استفاده از پارامترهای داده شده، به بی‌بعد سازی معادله ‏(28) می‌پردازیم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

معادله فوق شکل بی‌بعد شده معادله می‌باشد و معادله ‏(29) در حالت بی‌بعد شده به شکل زیر در می‌آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

این معادله شکل بی‌بعد شده معادله می‌باشد. در معادلات بالا داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با تعریف پارامترهای زیر می‌توان معادلات ‏(18) و ‏(19) را بشکل ساده‌تری نوشت.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

در نهایت معادلات ‏(34) و ‏(35) را می‌توان بشکل زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

که در این معادلات داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  تانسور نرخ کرنش متوسط بی بعد می‌باشد و بصورت زیر تعریف میشود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در معادله ‏(39) کمیت بی بعد شده می‌باشد و به شکل زیر بی بعد می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

با تقسیم طرفین معادله به به معادله بی بعد شده زیر می‌رسیم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن عدد ماخ توربولانسی می‌باشد و بصورت زیر تعریف می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن سرعت صوت می‌باشد.

در محاسبه این ضرائب در مدل لم- برمهوست از عدد رینولدز توربولانسی استفاده می‌شود که بصورت زیر تعریف می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

این عدد رینولدز را می‌توان بر حسب کمیت‌های بی‌بعد نوشت که بصورت زیر در خواهد آمد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. شرایط مرزی

اعمال شرایط مرزی مناسب در مدل­های آشفتگی نقشی اساسی در شبیه­سازی صحیح و دقیق جریان­های آشفته دارد. رمزی[[10]](#footnote-10) و اسپالارت[[11]](#footnote-11) نشان داده­اند که انتخاب شرایط مرزی نادرست در مدل­های آشفتگی می­تواند منجر به نتایج غیرفیزیکی و نادرست و یا حتی ناپایداری حل­گر شود [11]. لذا اعمال شرایط مرزی، یکی از مهمترین مراحل در شبیه­سازی جریان آشفته می­باشد. شرایط مرزی متغیرهای آشفتگی در مدل  برای جریان­های داخلی[[12]](#footnote-12) و خارجی[[13]](#footnote-13) دارای تفاوت­هایی می­باشد که در ادامه به آنها پرداخته می­شود:

* 1. شرط مرزی دیوار

بر روی دیواره در جریان­های داخلی و خارجی مقادیر زیر به عنوان شرایط مرزی در نظر گرفته می شوند[5]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. شرط مرزی ورودی

در ورودی جریان­های داخلی شرایط مرزی به نحو زیر می باشد[2]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در جریان­های خارجی نیز شرایط مرزی مطابق رابطه زیر پیشنهاد شده است [13]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. شرط مرزی خروجی

در خروجی جریان­های داخلی و خارجی، معمولا مشتق اول تمامی متغیرها، عمود بر مرز برابر صفر قرار داده می شود [2].

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. شرایط اولیه

شرایط اولیه متغیرهای آشفتگی در اکثر مسائل، برابر شرایط مرزی ورودی قرار داده می­شود [2]، بنابراین برای جریان­های داخلی داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و به نحو مشابه برای جریان­های خارجی، شرط اولیه مطابق زیر محاسبه می گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. شکل ماتریسی معادلات آشفتگی

جهت حل عددی و گسسته­سازی معادلات آشفتگی، راحت­تر است که این معادلات را به صورت ماتریسی بنویسم. به این منظور معادلات بی­بعد شده به فرم ماتریسی زیر بازنویسی می­شوند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این رابطه  و و  بیانگر بخش­های جابجایی[[14]](#footnote-14) می­باشند،  و  و  بیانگر بخش­های پخش­شوندگی[[15]](#footnote-15) و  ترم چشمه[[16]](#footnote-16) می­باشد. هرکدام از این بخش­ها به صورت زیر می­باشند

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. نحوه گسسته‌سازی حجم محدود معادلات

در روش حجم محدود، اولین قدم در گسسته­سازی معادلات، انتگرال­گیری از شکل بقایی معادلات بر روی یک حجم کنترل می­باشد. برای این کار معادله ‏(55) را در نظر بگیرید. با انتگرال گیری از این معادله بر روی یک سلول محاسباتی خواهیم داشت [14]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در ترم (1)، مقدار  بر روی یک حجم کنترل ثابت فرض می شود در نتیجه می توان ترم (1) را به صورت زیر ساده کرد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در این رابطه  مساحت حجم کنترل می­باشد.

برای ترم (2) و (3)، از قضیه گوس استفاده می شود. مطابق قضیه گوس[[17]](#footnote-17)، می­توان انتگرال روی سطح را به انتگرال روی مرزها تبدیل نمود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در این رابطه، بردار عمود بر مرز حجم کنترل می باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و نیز طول قطاع­های تشکیل­دهنده مرزهای حجم کنترل می­باشد.

بنابراین با تعریف ، می­توان ترم (2) را به صورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این رابطه،  تعداد اضلاع تشکیل دهنده هر یک از سلول های محاسباتی می­باشد.

ترم چشمه را نیز می­توان به صورت زیر ساده کرد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

بنابراین درنهایت می­توان معادله ‏(57) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

نحوه گسسته­سازی مکانی بخش جابجایی و بخش پخش­شوندگی در زیربرنامه­های مربوطه به نحو مبسوط توضیح داده خواهد شد.

1. گسسته‌سازی زمانی
   1. گام زمانی دوگانه

با انتگرال‌گيري از معادلات حاکم بر روي حجم كنترل، انتگرال بخش‌هاي زماني و مكاني اين معادلات از هم مجزا شده و براي تمام سلول های محاسباتی، يك دستگاه معادلات ديفرانسيل معمولي به شكل زير بدست مي‌آيد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که R(W)شامل مقادیر انتگرال‌گیری شده بخش‌های مکانی معادلات و W مقادیر بقایی می‌باشد. جهت بدست آوردن جواب معادله بالا باید این معادلات دیفرانسیل نسبت به زمان انتگرال‌گیری شود. با توجه به سادگی روش‌های صریح معمولاً این معادلات به روش صریح انتگرال‌گیری می‌شود. در روش‌های صریح به دلیل مشکل پایداری گام زمانی باید کوچک در نظر گرفته شود. محدودیت پایداری باید برای هر دو قسمت جابه‌جایی و پخش معادله‌ی ناویر استوکس اعمال شود. به این ترتیب دو محدودیت  و  به عنوان محدودیت گام زمانی جابه‌جایی و محدودیت گام زمانی ویسکوز به شکل زیر ایجاد می‌گردد [2]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

که در آن  بزرگترین مقدار ویژه‌ی معادله‌ی ناویر استوکس غیر ویسکوز میانگین گرفته در اطراف مرز حجم کنترل،  بزرگترین مقدار ویژه‌ی قسمت پخشی معادله‌ی ناویر استوکس است که در اطراف مرز حجم کنترل میانگین‌گیری می‌شود،  ضریبی‌ است که اهمیت محدودیت گام زمانی ویسکوز را نسبت به محدودیت گام زمانی غیر ویسکوز نشان می‌دهد که معمولاً حدود 25/0 انتخاب می‌شود و  مساحت حجم کنترل می‌باشد. در نتیجه گام زمانی نهایی به شکل زیر بدست می‌آید [2]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

به این ترتیب در هر سلول محاسباتی گام زمانی طبق رابطه‌ی بالا محاسبه می‌شود. اگر حل پایا مورد نظر باشد می‌توان از گام زمانی موضعی استفاده کرد یعنی هر سلول می‌تواند گام زمانی مربوط به خود را داشته باشد ولی در حل ناپایا باید گام زمانی تمام سلول‌ها یکسان و به شکل زیر باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

این موضوع باعث افت شدید سرعت همگرایی نسبت به حل پایا می‌گردد. علاوه بر گام زمانی موضعی در حل‌های پایا روش‌های افزایش سرعت همگرایی مثل آنتالپی میراکننده و هموارسازی مانده‌ها وجود دارد که در حل‌های ناپایا قابل استفاده نیستند. برای رفع این مشکل در حل ناپایا روش گام زمانی دوگانه ارائه شده است که می‌تواند سرعت همگرایی را تا دو برابر افزایش دهد.

در ادامه برای فهم بهتر روش گام زمانی دوگانه این روش در جریان غیرلزج و معادلات اویلر اعمال می‌شود. البته به طریق مشابه می‌توان این روش را در جریان‌های لزج و معادلات ناویر-استوکس هم اعمال کرد. معادلات اویلر دو بعدی به صورت زیر می‌باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با گسسته‌سازی بخش زمانی معادله بالا با روش رانگ کوتاm مرحله‌ای داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در حل ناپایا  رابطه فوق کوچکترین گام زمانی سلول‌ها است که این مقدار ممکن است بسیار کوچک باشد. به این ترتیب یک گام زمانی مجازی بزرگتر از  برای شبیه‌سازی با نام  در نظر گرفته می‌شود. معادله‌ ‏(64) را می‌توان با گام زمانی جدید به شکل زیر بازنویسی کرد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

برای اینکه جواب معادله‌ی فوق همان جواب معادله‌ی ‏(69) باشد باید در هر گام زمانی  شود. بنابراین در هر گام زمانی با یک حل پایا روبرو هستیم. برای گسسته‌سازی  نیز از یک روش مرتبه دو "رو به عقب[[18]](#footnote-18)" به شکل زیر استفاده می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

به این ترتیب رابطه‌ی ‏(70) به صورت زیر بازنویسی می‌شود [1]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  به شکل زیر می‌باشد [1]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در نتیجه در هر گام زمانی حقیقی با یک مساله‌ی پایا به شکل معادله‌ی فوق روبرو هستیم پس می‌توان با انتگرال‌گیری از این معادله در زمان مجازی  پاسخ حالت دائم آنرا که در حقیقت جواب رابطه ‏(70) در زمان حقیقی می‌باشد، بدست آورد [3]. با توجه به اینکه با یک مساله پایا روبرو هستیم می‌توان در آن از گام زمانی موضعی استفاده کرد. برای مثال اگر انتگرال‌گیری زمانی طبق روش اویلر محاسبه شود داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در رابطه‌ی فوق  شمارنده گام زمانی اصلی،  شمارنده تکرار داخلی برای محاسبه حل پایا،  زمان بدست آمده برای هر سلول و  زمان انتخاب شده برای پیش‌روی در زمان می‌باشد. از آنجا که جواب محاسبه شده از حل پایای معادله‌ ‏(75) همان جواب مساله در گام زمانی جدید است، در رابطه‌ی فوق  برابر  قرار داده می‌شود و برای هر سلول محاسباتی رابطه‌ی تکراری زیر بدست می‌آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

به این ترتیب در هر گام زمانی رابطه‌ی تکراری بیان شده حل می‌گردد تا لگاریتم باقیمانده اختلاف دو تکرار کمتر از مقدار خاصی شود. این مقدار می‌تواند بین 2- تا 4- باشد.

انتگرال‌گیری زمانی از معادله‌ ‏(74) به کمک روش رانگ کوتای چند مرحله‌ای نیز امکان پذیر است. در این صورت مانند روش اویلر در هر مرحله از روش رانگ کوتا رابطه‌ی تکراری در هر سلول به صورت زیر می‌باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن زیرنویس m نشان دهنده مرحله m ام روش رانگ کوتا است.

به این ترتیب با به‌کاربردن روش گام زمانی دوگانه در حل‌های ناپایا می‌توان با گام زمانی بزرگتری پیشروی کرد و در هر گام زمانی مسئله را تبدیل به یک حل پایا کرد که جواب حل پایا همان جواب مسئله در زمان جدید است. مزیت دیگر این روش این است که علیرغم ضمنی بودن نیازی به حل همزمان دستگاه معادلات خطی نمی‌باشد، بلکه این دستگاه معادلات به روش تکراری در یک زمان مجازی حل شده و پاسخ معادلات در هر زمان حقیقی بدست می‌آید. به این ترتیب در هر زمان مجازی می‌توان از کلیه تکنیک‌های تسریع سرعت همگرایی مانند هموارسازی مانده‌ها، آنتالپی میراکننده و گام زمانی موضعی استفاده نمود بدون آنکه بر دقت روش عددی لطمه‌ای وارد شود [3].

1. بخش‌های زیربرنامه

در این قسمت، توضیح تمامی بخش‌های زیربرنامه، مطابق شماره‌گذاری انجام شده در متن برنامه کامپیوتری ارائه شده است.

1. تعیین ثوابت موجود در مدل آشفتگی

در این قسمت، ثوابت موجود در مدل با توجه به روابط ارائه شده در قسمت پیشین مشخص شده است.

1. مقداردهی به آرایه­های مربوط به زمان قبل

در این قسمت، مقادیر بقایی مربوط به زمان قبل جایگذاری تا در روش رانگ کوتا از آنها استفاده گردد.

1. حل معادلات آشفتگی در حلقه مربوط به روش رانگ-کوتا

در یک حلقه به تعداد مراحل روش رانگ-کوتا معادلات  و  حل خواهند شد.

1. محاسبه ضرایب روش رانگ-کوتا

با استفاده از معادله ‏(77)، ضریب هرکدام از مراحل روش رانگ-کوتا محاسبه می­گردد.

1. محاسبه شرایط مرزی

در این قسمت، کلیه شرایط مرزی با فراخوانی زیربرنامه مربوطه تعیین می­گردند.

1. محاسبه مشتق سرعت در مرکز سلول

در این قسمت، مشتق اول مولفه­های سرعت در مرکز همه سلول­ها محاسبه می­شوند.

1. محاسبه مشتق متغیرهای آشفتگی روی اضلاع سلول­

در این قسمت، مشتق اول متغیرهای آشفتگی  و  روی اضلاع همه سلول­ها محاسبه می­شوند. این زیربرنامه نیز بصورت کلی و برای تمام مدل های آشفتگی دو معادله ای تدوین شده است. از آنجا که یکی از مواردی که باید در مرزهای تقارن رعایت شود، صفر بودن گرادیان در راستای عمود بر مرز می باشد بنابراین در اینجا باید مقدار گرادیان های اضلاع مرزی تقارن را برابر صفر قرار دهیم.

1. محاسبه بخش جابجایی

در این قسمت مقدار بخش جابجایی محاسبه می­شود. این بخش به صورت بالادست گسسته­سازی شده است. مانند دو زیربرنامه قبل، این زیربرنامه نیز بصورت کلی و برای تمام مدل های آشفتگی دو معادله ای تدوین شده است.

1. محاسبه بخش پخش­شوندگی

در این قسمت ، مقدار بخش پخش­شوندگی محاسبه می­شود. این بخش به صورت مرکزی گسسته­سازی شده است.

1. محاسبه ترم چشمه

در این قسمت طبق الگوریتم ارئه شده در زیر برنامه مربوط به این قسمت ترم چشمه محاسبه می­شود.

1. محاسبه مقادیر متغیرهای آشفتگی و لزجت تمام سلول­های شبکه

در یک حلقه تکرار بر روی تمامی سلول­های شبکه، مقادیر متغیرهای آشفتگی و لزجت تمام سلول­ها محاسبه می­گردد. در اینجا پیشروی در زمان با استفاده از روش گام زمانی دوگانه صورت می گیرد. مطابق با مطالب بیان شده و طبق معادله ‏(77)، مقادیر جدید متغیرهای آشفتگی حاصل می شود.

1. اطمینان از مثبت بودن متغیرهای آشفتگی

در صورتی که مقدار هرکدام از متغیرهای آشفتگی منفی شد، مقدار مثبت زمان قبل جایگزین آن می­شود. به این ترتیب اطمینان حاصل می­شود که متغیرهای آشفتگی همواره مثبت هستند.

1. محاسبه متغیرهای آشفتگی

در این قسمت با توجه به مقادیر بقایی به دست آمده، مقدار  و  محاسبه می­شوند.

1. محاسبه ثوابت و توابع موجود در مدل مورد بررسی

ثوابت و توابع ارائه شده () مطابق با روابط ارائه شده در قسمت پیشین محاسبه می شوند

1. محاسبه لزجت آشفتگی

لزجت آشفتگی با استفاده از رابطه زیر محاسبه می­شود.



1. مراجع

[1] W. Rodi, Turbulence models and their application in hydraulics, CRC Press, 1993.

[2] H. K. Vesteeg and W. Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, 2007.

[3] B. E. Launder and D. B. Spalding, "The numerical computation of turbulent flows," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 3, p. 269–289, 1974.

[4] K. A. Hoffmann, S. T. Chiang, Computational Fluid Dynamic Volume 3, Fourth Edition, Wichita, USA,2000.

[5] E. WADE MINER, THOMAS F. SWEAN, JR., ROBERT A. HANDLER AND RICHARD I. LEIGHTON “Evaluation of the Near-Wall k-E Turbulence Model by Comparison with Direct Simulations of Turbulent Channel Flow”,Naval Research Laboratory,1989.

[6] C. K. G. Lam, K. bremhorst, A modified form of the k-Epsilon model for predicting wall turbulence, ASME, 103,456-460,1981.

[7] Chien, J. C, Numerical Analysis of Turbulent Separated Subsonic Diffuser Flow, Symposium on Turbulent Shear Flows, University Park, Pennsylvania, Vol. 1, 18.19-18.25, 1977.

[8] Hassid, S., and Poreh, M., A Turbulent Energy Dissipation Model for Flows With Drag Reduction, ASME JOURNAL OF FLUIDS ENGINEERING, Vol. 100, 107-112, 1978.

[9] Gibson, M. M., Spalding, D. B., and Zinser, W., "Boundary-Layer Calculations Using Hassid-Poreh One-Equation Energy Model, Letters in Heat and Mass Transfer*,* Vol. 5, 73-80, 1978.

[10]ML Shur, MK Strelets, AK Travin, PR Spalart,” [Turbulencemodeling in rotating and curved channels: assessing the Spalart-Shur correction](https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=036N-rUAAAAJ&citation_for_view=036N-rUAAAAJ:2osOgNQ5qMEC)”, AIAA journal 38 (5), 784-792, 2000

[11] P. R. Spalart and C. L. Ramsey, "Effective Inflow Conditions for Turbulence Models in Aerodynamic Calculations," *AIAA Journal,* vol. 45, pp. 2544-2553, 2007.

[12] K. Y. Chien, "Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model," *AIAA Journal,* vol. 20, pp. 33-38, 1982.

[13] K. A. Hoffmann and S. T. Chiang, Computational Fluid Dynamics Vol 3, 2000.

[14] D. A. Anderson, J. C. Tannehill and R. H. Pletcher, Computational fluid dynamics and heat transfer, Washington: Hemisphere, 1984.

1. Production of Turbulent Kinetic Energy [↑](#footnote-ref-1)
2. Dissipation of Turbulent Kinetic Energy [↑](#footnote-ref-2)
3. Launder [↑](#footnote-ref-3)
4. Spalding [↑](#footnote-ref-4)
5. Vortical Flows [↑](#footnote-ref-5)
6. Separation [↑](#footnote-ref-6)
7. Large Adverse Pressure Gradients [↑](#footnote-ref-7)
8. Curved Boundary Layer [↑](#footnote-ref-8)
9. Damping Function [↑](#footnote-ref-9)
10. Ramsey [↑](#footnote-ref-10)
11. Spalart [↑](#footnote-ref-11)
12. Internal Flow [↑](#footnote-ref-12)
13. External Flow [↑](#footnote-ref-13)
14. Convective Term [↑](#footnote-ref-14)
15. Diffusion Term [↑](#footnote-ref-15)
16. Source Term [↑](#footnote-ref-16)
17. Guass Theorem [↑](#footnote-ref-17)
18. Backward [↑](#footnote-ref-18)